Übungsstunde lineare Algebra:

Heutige Themen:

- Givensrotation
- QR-Zerl. mit "
- Householdertransformation
- QR-Zerl. mit "
- LR-Zerl. Erklärung

Feedback Übung 1:

Aufgabe 1.5

Gegeben seien die zwei linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Gauss-Algorithmus die Lösungsmengen der beiden Gleichungssysteme.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -13 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{5\,\mathrm{II} + \mathrm{I}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{5} & -13 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 12 & 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = 3 - 6t \\ x_1 = \ldots \end{array}$$

Givensrotation:

Definition:

$$\underline{\underline{G}}_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \emptyset \\ & & c & \cdots & s & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \\ \emptyset & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

"Drehung in mathematisch positiver Richtung in der Ebene, welche vom i-ten & j-ten Basisvektor aufgespannt wird."

$c = \cos\varphi$

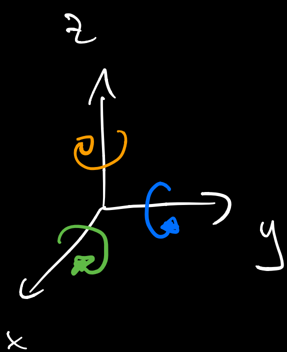
$s = \sin\varphi$

"Päckchen"

$$\underline{\underline{G}}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{G}}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{G}}_{13} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}(\varphi) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{G}}(-\varphi)$$



QR-Zerlegung mit der Givensrotation:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad |\,\underline{\underline{Q}}^{-1}\cdot$$

$$\underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{-1}\underline{b}$$

$$\underbrace{\underline{\underline{Q}}^{T}\underline{\underline{Q}}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{T}\underline{b}$$

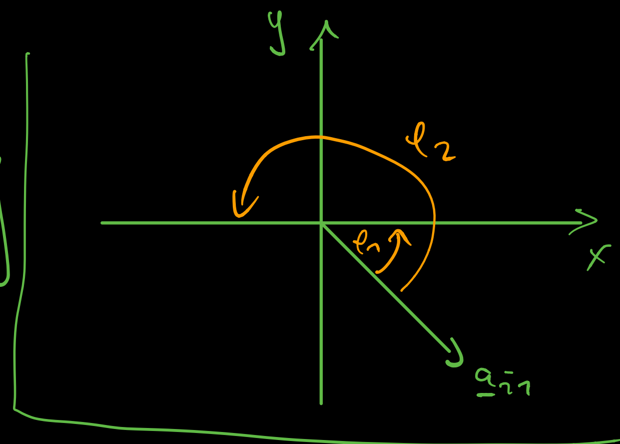
$$\underline{\underline{I}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^{T}\underline{b} = \underline{c}$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c}$$

$\underline{\underline{Q}}$ ist orthogonal!

$\underline{\underline{R}}$ r.o.d.

Geometrisch:



Beispiel 3.2:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}, \quad \underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} a_{i1} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \boxed{-1} & 4 \end{bmatrix} \end{array} \quad (-1 \to\, = 0)$$

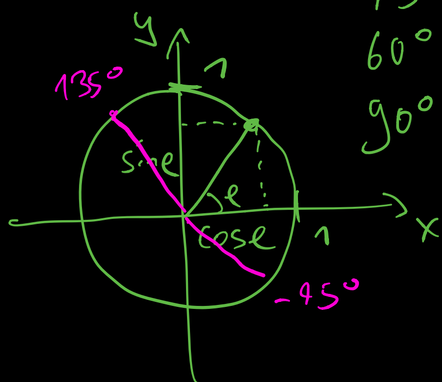
$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{G}}\cdot\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta - \sin\vartheta & 3\cos\vartheta + 4\sin\vartheta \\ \boxed{-\sin\vartheta - \cos\vartheta} & 4\cos\vartheta - 3\sin\vartheta \end{bmatrix}$$

$$\overset{!}{=} 0$$

ϑ	$\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$
$0°$	$\sqrt{4}/2$	0
$30°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$60°$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$90°$	$\sqrt{0}/2$	1



$$\Rightarrow \cos\vartheta = -\sin\vartheta$$

$$\vartheta = \underline{135°} \text{ oder } 315°$$

$$\Rightarrow \cos\vartheta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & +1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Wollten $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}$

haben $\underline{\underline{G}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} \quad | \ \underline{\underline{G}}^T \cdot$

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{R}} \\ &= \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{G}}^T = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{b} \qquad | \ \underline{\underline{Q}}^T$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{\underline{Q}}^T \underline{b} = \underline{c}$$

$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{c} \rightarrow$ Rückwärts einsetzen

Was wenn wir in 3D sind?

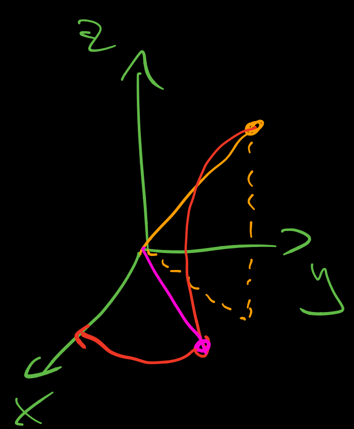
$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} a_{11} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \boxed{7} & 8 & 9 \end{bmatrix} \\ a_{31} \end{array}$$

$$\underline{\underline{G}}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Brauchen nun mehrere Drehungen!

$$\underline{\underline{G}}_1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * \\ \boxed{*} & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{\underline{A}}}}$$

gibt θ



$$\underline{\underline{G_1}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{G_2}} \cdot \underline{\underline{\tilde{A}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \Delta \\ 0 & \Delta & \Delta \\ 0 & \boxed{\Delta} & \Delta \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\hat{A}}}}$$

gibt θ

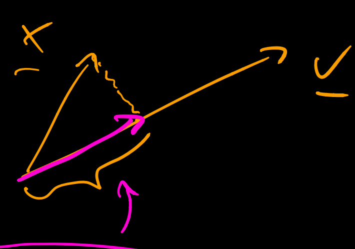
$$\underline{\underline{G_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{G_3}} \cdot \underline{\underline{\hat{A}}} = \underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

gibt ψ

$$\Rightarrow \qquad \overbrace{\underline{\underline{G_3}}\,\underline{\underline{G_2}}\,\overbrace{\underline{\underline{G_1}} \cdot \underline{\underline{A}}}^{\tilde{A}}}^{\hat{A}} = \underline{\underline{R}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \left(\underline{\underline{G_3}}\,\underline{\underline{G_2}}\,\underline{\underline{G_1}}\right)^T \underline{\underline{R}}$$

$$= \underbrace{\underline{\underline{G_1}}^T \underline{\underline{G_2}}^T \underline{\underline{G_3}}^T}_{\underline{\underline{Q}}} \underline{\underline{R}}$$



Housholdermatrix:

$$\frac{\underline{v}\,\underline{v}^T}{\underline{v}^T\underline{v}} \cdot \underline{x} = \boxed{\frac{\underline{v}}{\underline{v}^T\underline{v}} \cdot \underline{v}^T\underline{x}}$$

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}_n - 2 \cdot \boxed{\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}^T}{\underline{v}^T\cdot\underline{v}}} = \underline{\underline{I}}_n - 2\cdot\underline{u}\cdot\underline{u}^T, \quad \text{falls } \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$$

oder $\|\underline{u}\| = 1$

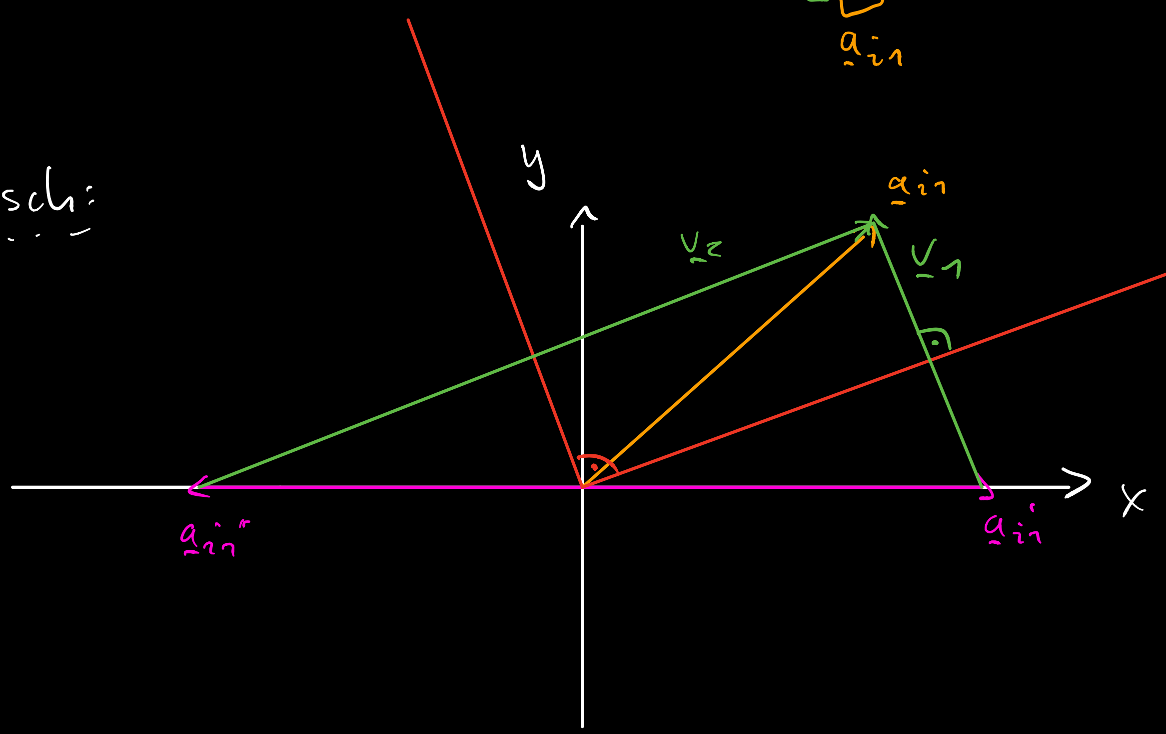
Projektor auf die Hyperebene, für welche $\underline{v}$ der Normalenvektor ist

QR-Zerlegung mit der Housholdermatrix:

Beispiel 3.3: $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ 2 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$

$\underline{a}_{i1}$

Grafisch:



$\underline{a}_{i1}' = \begin{bmatrix} \|\underline{a}_{i1}\| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underline{a}_{i1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \|\underline{a}_{i1}\| = \sqrt{4+4+1} = \underline{3}, \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{a}_{i1}' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \underline{a}_{i1} + \underline{a}_{i1}' = \underline{a}_{i1} + \|\underline{a}_{i1}\|\,\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow \underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{25+4+1}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = I - 2uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} - \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 25 & 10 & 5 \\ 10 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -10 & -10 & -5 \\ -10 & 11 & -2 \\ -5 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = H_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & u & u \\ 0 & a & a \\ 0 & \boxed{u} & u \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow H_2' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}$$

$$H_2 \cdot \overbrace{H_1 A}^{\tilde{A}} = R$$

$$A = (H_2 H_1)^T R$$

$$= H_1^T H_2^T R$$

$$= Q R$$

LR-Zerlegung:

Ich möchte euch anhand eines Beispieles zeigen, was die genaue Operation hinter der $\underline{\underline{L}}$ Matrix ist.

Bsp.: LR-Zerl. von $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix}}_{A} \right. \quad \begin{matrix} \text{II} - (+2)\text{I} \\ \longrightarrow \\ \text{III} - (+3)\text{I} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \text{III} - (+2)\text{II} \\ \longrightarrow \end{matrix} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{P} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}}_{R} \right.$$

Betrachten wir die Gaussmatrizen, welche unsere Gaussschritte zusammenfassen:

$$\left.\begin{matrix} \text{II} - 2\text{I} \;\&\; \text{III} - 3\text{I} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\[2ex] \text{III} - 2\text{II} : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}\right\}$$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{Haben wir zuerst gemacht}} \underline{\underline{A}}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Gaussmatrix}} = \underline{\underline{G}}$$

Ihr seht, die Matrix welche unser Gaussverfahren beschreibt ist nicht ganz trivial herzuleiten, sondern es handelt sich um die Multiplikation der zwei Schritte. Nun können wir $\underline{\underline{L}}$ abhängig von dieser Gaussmatrix $\underline{\underline{G}}$ bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{R}} &= \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{A}} \\ \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{R}} \end{aligned}\right\} \underline{\underline{L}} = \underline{\underline{G}}^{-1}$$

Die Matrix $\underline{\underline{L}}$ der LR-Zerlegung ist also tatsächlich die Inverse unserer Gaussmatrix!

Gauss-Jordan

Ihr seht die Vorzeichen werden getauscht.

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}}_{\underline{\underline{G}}} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right. \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}+2\mathrm{II}} \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \left| \left. \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \boxed{3} & 2 & 1 \end{array} \right\} \underline{\underline{L}} \right.$$

Erhaltet gerade wieder das negative unserer ursprünglichen Operation

Die Einträge in $\underline{\underline{L}}$ werden also so "komisch" gewählt, weil es die Inverse des Produktes unserer Gaussoperationen ist. Nicht genau das was wir beim Gaussen machen.